



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Métodos variacionales para problemas de contorno.

Autor/es

LUIS MARTÍNEZ JARABA

Director/es

VÍCTOR LANCHARES BARRASA

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



Métodos variacionales para problemas de contorno., de LUIS MARTÍNEZ
JARABA

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.



Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Métodos variacionales para problemas de contorno

Alumno: Luis Martínez Jaraba

Tutor: Víctor Lanchares Barrasa

Curso académico: 2017/2018

Resumen

En esta memoria trataremos los métodos en elementos finitos, junto con una pequeña introducción histórica, donde veremos las distintas ideas que fueron surgiendo para desarrollarlos.

También se hace un estudio matemático de dichos métodos donde encontraremos analogías con otros métodos conocidos, trabajados en este caso sobre una dimensión. Veremos también una generalización de la teoría expuesta de primera mano sin salirnos de la dimensión 1.

Por último, se abarcarán tres problemas, uno trivial y dos no triviales para poder observar la bondad de los métodos, así como para la obtención de soluciones periódicas.

Summary

In this report we will deal with finite element methods, along with a brief historical introduction, where we will see the different ideas that were emerging to develop them.

There is also a mathematical study of these methods where we will find analogies with other known methods, worked in this case on one dimension. We will also see a generalization of the theory exposed at first hand without leaving dimension 1.

Finally, three problems will be covered, one trivial and two non-trivial in order to observe the goodness of the methods, as well as to obtain periodic solutions.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Cálculo variacional	1
1.1.1. Ecuación diferencial de Euler para Problemas Varia- cionales	2
1.1.2. Joseph Louis de Lagrange	5
1.2. Walter Ritz	6
1.3. Boris Galerkin	8
2. Formulación débil	11
2.1. Aproximación de Ritz-Galerkin	14
2.2. Estimación del error	15
2.3. Elementos finitos	18
2.3.1. Relación con los métodos en diferencias	22
2.4. Extensión a otras ecuaciones lineales	23
3. Soluciones periódicas	31
3.1. Ejemplo 1	31
3.1.1. Resolución mediante funciones lineales a trozos	32
3.1.2. Resolución mediante funciones spline	35
3.2. Ejemplo 2	36
3.3. Ejemplo 3	43
Bibliografía	45

Capítulo 1

Introducción

Galileo decía que la ciencia está escrita en lenguaje matemático y que, por tanto, si queremos conocer las leyes que rigen los procesos que tienen lugar en el mundo físico, debemos usar las matemáticas. Sin duda alguna, las ecuaciones diferenciales son imprescindibles en esta tarea y su estudio ha constituido, y constituye, uno de los campos de investigación más activos de las matemáticas. De hecho, la necesidad de resolver problemas físicos concretos ha actuado de motor para el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales en múltiples aspectos.

Esta relación entre matemáticas y física se hace patente gracias a las leyes de Newton que tienen como consecuencia la aparición, de manera casi inevitable, de ecuaciones diferenciales para describir cualquier proceso físico. Si a esto añadimos que, casi simultáneamente a las leyes de Newton, aparece y se desarrolla el cálculo infinitesimal no es de extrañar que en los orígenes fueran multitud los problemas que atraieron la atención de los matemáticos. Muchos de ellos aparecieron propuestos para retar a la comunidad científica y dieron lugar a ingeniosas soluciones y métodos que luego se formalizarían y dotarían del rigor matemático suficiente.

Gracias a uno de tales retos surgió el cálculo de variaciones y su relación con las ecuaciones diferenciales. Puesto que esta relación está en la base de los métodos numéricos que se van a tratar en esta Memoria, vamos a hacer un pequeño resumen de cómo surgió y quiénes fueron los matemáticos que contribuyeron a su desarrollo.

1.1. Cálculo variacional

Probablemente el problema que dio origen al cálculo de variaciones fue el de la braquistócrona con el cual Johann Bernoulli retó, en 1696, a la

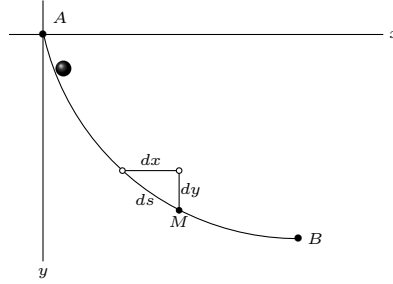


Figura 1.1: Problema de la braquistocrona.

comunidad científica de su época. El problema en cuestión es el siguiente: *Dados dos puntos A y B en un plano vertical, encontrar la curva que los une de manera que un cuerpo que se desliza sobre la misma, bajo la acción de la gravedad, emplee el menor tiempo posible entre A y B.*

Galileo ya estudió este problema y sabía que la solución no era la línea recta que une los puntos A y B. Él pensó que se trataba de un arco de circunferencia, pero tuvieron que pasar algo más de 50 años para que la verdadera forma de la curva fuera desvelada por Bernoulli. Para poder conseguirlo es importante trasladar el problema físico a una cuestión matemática. Apoyándonos en la Figura 1.1 se ve que para recorrer el arco de longitud ds el tiempo empleado, que llamaremos dJ , es

$$dJ = \frac{ds}{v},$$

siendo v la velocidad. Ahora bien, la velocidad queda determinada por la altura en dicho instante y la aceleración de la gravedad según

$$v = \sqrt{2gy},$$

por lo que el problema se reduce a encontrar la función $y(x)$ que minimiza el tiempo total, que vendrá dado por la integral

$$J = \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy}} dx,$$

donde $p = dy/dx$.

1.1.1. Ecuación diferencial de Euler para Problemas Variacionales

Euler, en 1744, en su obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latiss-*

simo sensu accepti propone un método para resolver una gran variedad de problemas de minimización. Entre ellos se planteaba encontrar los extremos (máximos o mínimos) de un funcional J definido como

$$J = \int_a^b Z(x, y, p) dx, \quad (1.1)$$

donde $p = \frac{dy}{dx}$ y Z es una función arbitraria. Así, el problema de la braquistócrona no es más que un caso particular de este problema más general. Euler vio que encontrar una solución óptima, en el sentido de maximizar o minimizar el funcional, era equivalente a resolver una ecuación diferencial, lo que le llevó al siguiente Teorema

Teorema 1 (Teorema de Euler). *Si $y(x)$ es una solución óptima de (1.1) entonces*

$$N - \frac{dP}{dx} = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{donde } N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p}.$$

La ecuación (1.2) se conoce como *ecuación de Euler* y, como se ve, se trata de una ecuación diferencial. Puesto que P es, en general, una función de $p = y'$, y dado que este término aparece derivado una vez más en la ecuación de Euler, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de orden dos para $y(x)$, la cual puede llegar a ser difícil de resolver. Sin embargo, en el caso en que Z sea *independiente* de x , es decir, si

$$dZ = N dy + P dp, \quad (1.3)$$

Euler encontró una manera elegante de reducir el orden. La idea es introducir y como nueva variable independiente, por lo que la ecuación puede verse como una ecuación con variable dependiente p y variable independiente y . En este caso la ecuación será de primer orden. En efecto

$$N - \frac{dP}{dx} = N - \frac{dP}{dy} \frac{dy}{dx} \Rightarrow N dy - p dP = 0.$$

Si sumamos y restamos $P dp$ y tenemos en cuenta (1.3) resulta

$$N dy + P dp - (P dp + p dP) = dZ - d(pP) = 0 \Rightarrow Z - pP = Z - p \frac{\partial Z}{\partial p} = C,$$

siendo C una constante.

Quizás el problema más sencillo que puede abordarse con la idea de Euler es obtener la curva que minimiza la distancia entre dos puntos dados

$$A \equiv (a, y(a)), \quad B \equiv (b, y(b)).$$

En este caso se trata de minimizar

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} dx. \quad (1.4)$$

Siguiendo la notación de Euler, $N = 0$ y entonces $dP/dx = 0$ por lo que P es constante, es decir

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = C_0 \Rightarrow p = C_1 = \frac{C_0}{\sqrt{1 - C_0^2}}, \quad |C_0| < 1,$$

por lo que $y(x) = C_1 x + C_2$ y la solución es la línea recta que une los dos puntos. Pero este resultado, como explica Euler, es válido siempre que Z dependa únicamente de p , lo que sucede cuando se trata de minimizar el funcional

$$J = \int_a^b \frac{p^2}{2} dx, \quad (1.5)$$

en el que la ecuación de Euler (1.2) se convierte en

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Este problema puede considerarse como una aproximación del de minimizar la distancia entre dos puntos, ya que el funcional (1.5) puede verse como una aproximación de (1.4) para valores pequeños de p (basta desarrollar en serie de Taylor el integrando hasta orden 1). Ahora bien, el problema considerado puede interpretarse como el correspondiente a determinar la forma que adopta una cuerda elástica que une dos puntos A y B , que podemos suponer sobre el eje x . Obviamente, si no hay ninguna fuerza que actúe sobre la cuerda, la forma adoptada es la de una línea recta. Sin embargo, si actúa una fuerza transversal, $f(x)$, que produce un desplazamiento $y(x)$ en un punto de la cuerda, la forma que adopte será la que minimice la energía, que viene dada por el funcional

$$J = \int_a^b \left(\frac{p^2}{2} - f \cdot y \right) dx. \quad (1.6)$$

La ecuación de Euler en este caso resulta ser

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x), \quad (1.7)$$

que se conoce como *ecuación de Poisson*. Este problema no despertó el interés de Euler por su extrema sencillez, pero su generalización a dimensiones más altas es un tema de gran relevancia e importancia, como veremos posteriormente.

1.1.2. Joseph Louis de Lagrange

La demostración del teorema de Euler que se puede encontrar en cualquier libro en el que se trate el cálculo de variaciones (ver por ejemplo [5]) la dio Lagrange en 1755, cuando contaba con tan solo 19 años, en una breve carta que envió a Euler. La idea de Lagrange fue la siguiente: perturbamos la solución óptima $y(x)$ por una variación arbitraria que se anula en los extremos de la integral. Es decir, se añade a $y(x)$ una función fija $\delta(x)$ multiplicada por un escalar ϵ y se inserta el resultado en (1.1). Esta integral debe ser mínima para todas las funciones $\delta(x)$, que se anulan en los extremos de la integral, cuando $\epsilon = 0$, es decir, la derivada de

$$J(\epsilon) = \int_a^b Z(x, y + \epsilon\delta, p + \epsilon\delta') dx \quad (1.8)$$

con respecto a ϵ debe ser cero en $\epsilon = 0$. Derivamos como sigue:

$$\left. \frac{\partial J(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b (N \cdot \delta + P \cdot \delta') dx = 0, \quad (1.9)$$

con $N = \partial Z / \partial y$ y $P = \partial Z / \partial p$, según la notación dada anteriormente. Integrando por partes, y teniendo en cuenta que $\delta(a) = \delta(b) = 0$, se llega a

$$\int_a^b \left(N - \frac{dP}{dx} \right) \delta dx = 0. \quad (1.10)$$

Puesto que δ es arbitraria, concluimos que

$$N - \frac{dP}{dx} = 0. \quad (1.11)$$

Este último paso, una conclusión trivial para el joven descubridor, causó después las mayores dificultades.

La importancia de las ideas de Euler y Lagrange radica en que existe una especie de dualidad entre una ecuación diferencial y un problema variacional. De alguna manera, resolver uno de los problemas es equivalente a resolver el otro. A pesar de que la demostración de Lagrange está desprovista de todo significado geométrico, la demostración de Euler está impregnada de la

esencia de los métodos que veremos más adelante y que no es otra que la discretización, algo que Euler manejaba con habilidad. En concreto, Euler usó una poligonal para aproximar la solución del problema y, mediante el paso al límite, obtuvo su ecuación diferencial [2].

1.2. Walter Ritz

Esta dualidad entre las ecuaciones diferenciales y el cálculo de variaciones llevó a Ritz a escribir su primer trabajo sobre métodos variacionales en respuesta al premio *Prix Vaillant*, propuesto por la Academia de Ciencias de París en 1907, sobre la deformación de una placa elástica. Ritz se dio cuenta que el problema era similar a los que había considerado en su tesis, pero su solución fue rechazada por el jurado. Sin embargo, su trabajo, publicado en 1908, fue rápidamente reconocido por los ingenieros como de suma utilidad para resolver innumerables problemas. Poincaré se disculpó en nombre de la Academia de París y le informó de que el premio le sería otorgado en 1909, aunque Ritz no pudo recogerlo, ya que murió poco antes.

La deformación de una placa elástica bajo una fuerza externa era un problema muy complejo en ese tiempo. Parece ser que la primera persona en considerarlo fue Sophie Germain en varios artículos, que fueron corregidos y mejorados por Lagrange y Poisson, aunque fue Kirchhoff quien logró formular este problema en forma de ecuación diferencial

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (1.12)$$

a sabiendas de que debían añadirse unas condiciones de contorno. Si asumimos que tenemos una placa Ω que se encuentra sujeta por los bordes, tenemos que

$$w = 0 \text{ y } \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (1.13)$$

donde $\partial\Omega$ representa el borde de la placa y \vec{n} el vector normal.

Ritz, siguiendo los pasos de Euler y Lagrange, estableció que (1.12) era equivalente a minimizar el funcional

$$J = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) - f \cdot w \right) dx dy \quad (1.14)$$

o bien

$$J = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f \cdot w \right) dx dy. \quad (1.15)$$

Para ver que de (1.15) se deduce (1.12), introduciremos una perturbación, sustituyendo w por $w + \epsilon\delta$, donde $\delta := \delta(x, y)$ satisface las condiciones en la frontera. Entonces, tenemos

$$J = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta(w + \epsilon\delta))^2 - f \cdot (w + \epsilon\delta) \right) dx dy.$$

Como el mínimo se alcanza cuando $\epsilon = 0$, una condición necesaria es que la derivada respecto a ϵ sea cero cuando ϵ es cero. Así, si derivamos J respecto a ϵ , suponiendo que se cumplen las condiciones para poder derivar bajo el signo integral, se tiene

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \iint_{\Omega} (\Delta(w + \epsilon\delta) \cdot \Delta\delta - f \cdot \delta) dx dy.$$

Como el mínimo se alcanza en $\epsilon = 0$, se tiene que

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \iint_{\Omega} (\Delta w \cdot \Delta\delta - f \cdot \delta) dx dy = 0.$$

Ahora utilizando la segunda identidad de Green [4]

$$\iint_{\Omega} (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) dV = \int_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} \right) ds, \quad (1.16)$$

con $\psi = \Delta w$ y $\varphi = \delta$ y teniendo en cuenta que δ y $\partial\delta/\partial\vec{n}$ se anulan en $\partial\Omega$, se tiene que

$$\iint_{\Omega} (\Delta(\Delta w) - f) \cdot \delta dx dy = 0 \Leftrightarrow \Delta(\Delta w) = f,$$

donde

$$\Delta(\Delta w) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

Es aquí donde entra en juego la idea de Ritz, que consiste en reemplazar la función solución por una combinación lineal de una colección de funciones bien escogidas

$$\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y), \phi_4(x, y), \dots,$$

de manera que

$$w(x, y) = a_1 \phi_1(x, y) + a_2 \phi_2(x, y) + \dots + a_n \phi_n(x, y). \quad (1.17)$$

siendo los coeficientes a_i , $i = 1, \dots, n$, lo que hay que determinar. Por supuesto, la bondad del método dependerá de la elección de estas funciones,

que Ritz eligió como los *modos normales* de vibración asociados a una cuerda sujeta por los extremos, gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = K^4\psi, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0.$$

Mediante los métodos para ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, se obtiene que las soluciones no triviales de la ecuación anterior son de la forma

$$\psi_n(x) = \cos K_n x - \cosh K_n x - \frac{\cos K_n - \cosh K_n}{\sin K_n - \sinh K_n} (\sin K_n x - \sinh K_n x),$$

donde K_n es la n -ésima raíz positiva de la ecuación $\cos K_n \cosh K_n = 1$. Así, para los primeros valores de n tenemos que

$$K_1 \approx 4,7300, \quad K_2 \approx 7,8532, \quad K_3 \approx 10,9956, \dots,$$

y a partir de $n = 3$, se puede ver que $K_n \approx (2n+1)\pi/2$. Tomando como base estas funciones, eligió

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= \psi_1(x)\psi_1(y), & \phi_2(x, y) &= \psi_1(x)\psi_3(y) + \psi_3(x)\psi_1(y), \\ \phi_3(x, y) &= \psi_3(x)\psi_3(y), & \phi_4(x, y) &= \psi_1(x)\psi_5(y) + \psi_5(x)\psi_1(y), \dots \end{aligned}$$

donde se hace uso de la simetría del problema. De este modo, sustituyendo $w(x, y)$ por (1.17) en (1.15) el problema se reduce a encontrar los coeficientes de la combinación lineal que minimizan el funcional.

1.3. Boris Galerkin

En 1915, Boris Galerkin publica un artículo en el que presenta una idea de un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales, en particular problemas de valores en la frontera. El método en sí era muy parecido al de Ritz, pero con algunas diferencias. En este sentido, no asoció su solución a un problema variacional. Su idea era considerar unas funciones test que multiplicaba a ambos lados de la ecuación diferencial y que integraba sobre todo el dominio donde ésta está definida. Para el problema de las vibraciones de una placa, sea v una función que satisface las condiciones en la frontera, entonces, para cada una de tales funciones, debe cumplirse

$$\iint_{\Omega} (\Delta\Delta w \cdot v) \, dxdy = \iint_{\Omega} f \cdot v \, dxdy.$$

Aplicando la segunda identidad de Green (1.16), se llega a

$$\iint_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta v \, dxdy = \iint_{\Omega} f \cdot v \, dxdy. \quad (1.18)$$

Esta expresión es muy parecida al funcional asociado al problema a resolver, pero aquí Galerkin procede de manera directa aproximando tanto w como v por una serie de funciones del tipo (1.17), donde él usaba polinomios en lugar de modos normales. De esta manera, se tiene

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n W_i \phi_i(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i(x, y).$$

Sustituyendo en (1.18) se llega a

$$\sum_{i=1}^n V_i \iint_{\Omega} \sum_{j=1}^n W_j \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \, dxdy = \sum_{i=1}^n V_i \iint_{\Omega} f \cdot \phi_i(x, y) \, dxdy,$$

igualdad que debe cumplirse para cualquier elección de V_i , por lo que

$$\sum_{j=1}^n W_j \iint_{\Omega} \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \, dxdy = \iint_{\Omega} f \cdot \phi_i(x, y) \, dxdy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esto constituye un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que son los coeficientes W_j de la solución aproximada del problema. Puede verse que, bajo ciertas condiciones, resolver el problema (1.18) es equivalente a minimizar el funcional (1.15), por lo que, para ciertos problemas, el método de Ritz es equivalente al de Galerkin.

Tanto las ideas de Ritz como de Galerkin demostraron ser muy productivas, no solo en la mecánica estructural, sino también en la física y en la matemática en general. Hoy en día proporcionan una base para algoritmos en los campos de la mecánica, la termodinámica, el electromagnetismo, la hidrodinámica y muchos otros que son la base del denominado *método de los elementos finitos*.

El método de elementos finitos proporciona un formalismo que permite generar algoritmos para aproximar las soluciones de una ecuación diferencial con condiciones de contorno. En el siguiente capítulo vamos a estudiar el fundamento del método. Para ello, tomaremos como base la ecuación de Poisson en una dimensión, en el intervalo $[0, 1]$, con condiciones adecuadas en la frontera.

Capítulo 2

Formulación débil de problemas de contorno

En este capítulo vamos a formalizar el método de Ritz-Galerkin para el caso de la ecuación de Poisson en una dimensión y donde supondremos unas condiciones de contorno específicas. Es decir, estaremos considerando un problema relacionado con la ecuación diferencial (1.7), asociada al funcional (1.5). A pesar de considerar un caso particular, los resultados que se van a presentar pueden aplicarse a una clase más general de problemas de contorno. Seguiremos el esquema utilizado en [1].

En concreto, consideraremos el siguiente problema de valores en la frontera en el intervalo cerrado $[0, 1]$

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \text{ en } [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde la función $f(x)$ supondremos que es suficientemente regular. En general supondremos que $f(x) \in C^0([0, 1])$.

Como ya hemos visto hay una dualidad entre resolver este problema y la de minimizar el funcional correspondiente. Así, si u es solución de (2.1) y v es cualquier función (suficientemente regular) tal que $v(0) = 0$, consideramos el producto escalar

$$(f, v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (2.2)$$

Puesto que $u(x)$ es la solución de la ecuación diferencial (2.1) podemos escribir

$$(f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx = \int_0^1 -u''(x)v(x) dx \quad (2.3)$$

e, integrando por partes, llegamos a

$$(f, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad (2.4)$$

que denotaremos también por $a(u, v)$. Ahora introducimos el espacio de funciones V definido como

$$V = \{v \in L^2(0, 1) : a(u, v) < \infty, v(0) = 0\}.$$

Entonces, podemos decir que la solución del problema (2.1) está caracterizada por

$$u \in V \quad \text{tal que} \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (2.5)$$

que se llama formulación débil o variacional de (2.1). Podemos decir que la relación (2.5) recibe el nombre de “variacional” debido a que la función v varía arbitrariamente. Antes de ver que la solución de (2.5) proporciona la solución del problema original (2.1), es interesante hacer notar que $a(u, v)$ define un producto interno en V .

Proposición 1. $a(u, v)$ define un producto interno en V

Demostración. Es evidente que $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ y que es lineal, es decir,

$$a(\lambda u, v) = \lambda a(u, v), \quad a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w).$$

Solo falta probar que $a(u, u) \geq 0$, con igualdad solo cuando $u = 0$. Ahora bien,

$$a(u, u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \geq 0.$$

Si se da la igualdad, entonces $u'(x) = 0$, por lo que $u(x)$ es constante en $[0, 1]$. Como $u \in V$ resulta $u(0) = 0$ y, por tanto, $u(x) \equiv 0$. \square

Veamos ahora que, efectivamente, (2.5) proporciona la solución del problema original (2.1). El siguiente teorema nos asegura esto bajo ciertas suposiciones.

Teorema 2. *Supongamos $f \in C^0([0, 1])$, $u \in C^2([0, 1])$ satisfaciendo (2.5). Entonces, u resuelve (2.1).*

Demostración. Sea $v \in V \cap C^1([0, 1])$. De la definición de $a(u, v)$ resulta

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx.$$

Integrando por partes, llegamos a

$$a(u, v) = \int_0^1 (-u'')v \, dx + u'(1)v(1)$$

y, por tanto

$$(f, v) = a(u, v) = \int_0^1 (-u'')v \, dx + u'(1)v(1) \Rightarrow (f + u'', v) = u'(1)v(1). \quad (2.6)$$

De aquí se deduce que $(f + u'', v) = 0$ para todo $v \in V \cap C^1([0, 1])$ tal que $v(1) = 0$. Sea

$$w = f + u'' \in C^0([0, 1]).$$

Si $w \not\equiv 0$, entonces $w(x)$ tiene signo constante en algún intervalo $[x_0, x_1] \subset [0, 1]$, con $x_0 < x_1$. Sea $v \in V \cap C^1([0, 1])$ tal que $v(1) = 0$ definida como

$$\begin{cases} v(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2, & x \in [x_0, x_1] \\ v(x) = 0, & x \notin [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Es claro que $(w, v) \neq 0$, ya que wv tiene signo constante en $[x_0, x_1]$ y se anula en el resto del intervalo $[0, 1]$. Pero esto contradice el que $(w, v) = 0$ si $v(1) = 0$, por lo que $w = 0$ y, por tanto, $u'' = f$. Ahora, tomamos $v(x) = x$ y, aplicando (2.6), se deduce que $u'(1) = 0$. Puesto que $u \in V$ entonces $u(0) = 0$ y u es solución de (2.1). \square

Nota 1. La solución de (2.5) minimiza el funcional (1.6). Para ver esto, escribimos el funcional J , para una función $v \in V$, de la siguiente forma

$$J(v) = a(v, v) - 2(f, v).$$

Puesto que u satisface (2.1), entonces $f = -u''$ y

$$J(v) = a(v, v) - 2(-u'', v) = a(v, v) - 2a(u, v).$$

Sumando y restando $a(u, u)$, resulta

$$J(v) = a(v, v) - 2a(u, v) + a(u, u) - a(u, u) = a(u - v, u - v) - a(u, u).$$

Puesto que $a(u - v, u - v) > 0$ si $v \neq u$, entonces

$$J(v) > -a(u, u) = J(u),$$

ya que u es solución de (2.1).

Nota 2. La condición de contorno $u(0) = 0$ se llama esencial, pues aparece de forma explícita en la formulación variacional, i.e., en la definición de V . Este tipo de condición de contorno se dice que es de “Dirichlet”. La condición $u'(1) = 0$ se llama natural pues aparece de forma implícita. A este tipo de condición también se le conoce por el nombre de “Neumann”.

2.1. Aproximación de Ritz-Galerkin

La esencia del método de Ritz-Galerkin se basa en reemplazar el espacio V por otro espacio S de dimensión finita. En ese sentido, sea $S \subset V$ un subespacio de dimensión finita y consideremos (2.5), donde reemplazamos V por S , entonces el problema que nos planteamos es el encontrar

$$u_S \in S \text{ tal que } a(u_S, v) = (f, v) \quad \forall v \in S. \quad (2.7)$$

Esto nos permite definir fácilmente un método discreto para aproximar (2.1), que es lo que se conoce como método de Ritz-Galerkin. Ahora bien, debemos comprobar que (2.7) realmente define un objeto computable. De hecho, veremos cómo (2.7) es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales finito que determina de manera única u_S . Demostraremos esto en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Dada $f \in L^2(0, 1)$, (2.7) tiene una única solución.*

Demostración. Sea $u_S \in S$ la solución, si existe, de (2.7), que podremos escribir en términos de una base $\{\phi_i : 1 \leq i \leq n\}$ de S . Entonces

$$u_S = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j.$$

Análogamente, para $v \in S$ tendremos

$$v = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i.$$

De (2.7) se sigue que u_S es solución si, para todo $v \in S$, se cumple

$$a \left(\sum_{j=1}^n U_j \phi_j, \sum_{i=1}^n V_i \phi_i \right) = \left(f, \sum_{i=1}^n V_i \phi_i \right).$$

Reescribiendo la expresión anterior resulta

$$\sum_{i=1}^n V_i \left(\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_i, \phi_j) \right) = \sum_{i=1}^n V_i (f, \phi_i).$$

Como esto debe cumplirse cualquiera que sea la elección de los V_i , entonces

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Sean

$$\mathbf{K} = (K_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i)), \quad \mathbf{U} = (U_j), \quad \mathbf{F} = (F_i) = ((f, \phi_i)), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (2.8) se puede escribir en forma matricial

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Ahora debemos probar la unicidad de la solución, es decir existe un único vector \mathbf{U} solución de (2.9), lo que equivale a probar que el correspondiente sistema homogéneo tiene también solución única. Supongamos que existe un vector no nulo $\mathbf{V} = (V_j)$ tal que $\mathbf{KV} = 0$. Sea $v \in S$ tal que

$$v = \sum_{j=1}^n V_j \phi_j.$$

Puesto que $\mathbf{KV} = 0$ se sigue que

$$a(v, \phi_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Multiplicando por V_j y sumando en j , resulta

$$\sum_{j=1}^n V_j a(v, \phi_j) = 0,$$

esto implica que

$$a(v, v) = \int_0^1 (v')^2(x) dx = 0$$

y, por la Proposición 1, $v \equiv 0$, es decir $\mathbf{V} = 0$. Por lo tanto, la solución de (2.9) existe y es única. \square

Nota 3. La matriz \mathbf{K} suele denominarse “matriz de rigidez”, un nombre que viene de las matrices correspondientes a problemas surgidos en el contexto del cálculo de estructuras. Claramente es simétrica y definida positiva, como se deduce de la Proposición 1. Este hecho es el que hemos usado para probar la unicidad de la solución.

2.2. Estimación del error

Al sustituir el problema original (2.1) por (2.7), es evidente que, salvo que la solución de (2.1) esté en S , obtendremos soluciones diferentes. La cuestión es saber si la solución del problema discreto es una buena aproximación de

la correspondiente a (2.1). Para empezar, observemos que u_S no es más que la proyección ortogonal de u sobre S según el producto interno definido por $a(-, -)$. En efecto, sustrayendo (2.7) de (2.5) resulta

$$a(u - u_S, w) = 0 \quad \forall w \in S, \quad (2.10)$$

ecuación que resulta clave para garantizar las bondades de los métodos de Ritz-Galerkin o de elementos finitos.

El producto interno $a(-, -)$ induce una norma que denotamos por $\|-\|_E$, definida como

$$\|u\|_E := a(u, u)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (u'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, podemos aplicar la desigualdad de Schwarz, que relaciona la norma con el producto interno, de manera que se tiene

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_E \|w\|_E \quad \forall v, w \in V. \quad (2.11)$$

Así, para cualquier $v \in S$,

$$\|u - u_S\|_E^2 = a(u - u_S, u - u_S) = a(u - u_S, u - v) + a(u - u_S, v - u_S)$$

y, aplicando (2.10) con $w = v - u_S$, resulta

$$\|u - u_S\|_E^2 = a(u - u_S, u - v).$$

Finalmente, teniendo en cuenta (2.11), llegamos a

$$\|u - u_S\|_E^2 \leq \|u - u_S\|_E \|u - v\|_E. \quad (2.12)$$

Si $\|u - u_S\|_E \neq 0$, podemos simplificar (2.12) para obtener

$$\|u - u_S\|_E \leq \|u - v\|_E,$$

cualquiera que sea $v \in S$. En el caso en que $\|u - u_S\|_E = 0$, entonces la desigualdad (2.12) es trivial. Tomando el ínfimo de todos los $v \in S$ se sigue que

$$\|u - u_S\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E : v \in S\}.$$

Como $u_S \in S$, tenemos que

$$\inf\{\|u - v\|_E : v \in S\} \leq \|u - u_S\|_E.$$

Entonces,

$$\|u - u_S\|_E = \inf\{\|u - v\|_E : v \in S\}.$$

Más aún, hay un elemento (u_S) para el cual el ínfimo se alcanza, e indicamos esto sustituyendo la palabra “ínfimo” por “mínimo”. Así pues, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4. $\|u - u_S\|_E = \min\{\|u - v\|_E : v \in S\}$.

Lo que nos dice el Teorema 4 es que el error para el método de Ritz-Galerkin es óptimo en la norma E . Utilizaremos esto después para obtener estimaciones concretas del error cuando consideremos casos particulares de S . Antes de eso, vamos a dar una estimación del error en la norma $L^2(0, 1)$, definida como

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 v(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para ello, usaremos lo que se conoce como argumento de “dualidad”. Sea w la solución del siguiente problema de valores en la frontera

$$-w'' = u - u_S \quad \text{en } [0, 1] \quad \text{con} \quad w(0) = w'(1) = 0,$$

donde u y u_S son soluciones de (2.1) y (2.7), respectivamente. Lo que queremos es dar una estimación de $\|u - u_S\|$. Así,

$$\|u - u_S\|^2 = (u - u_S, u - u_S) = (u - u_S, -w'').$$

Integrando por partes, y teniendo en cuenta que $(u - u_S)(0) = w'(1) = 0$, se obtiene

$$\|u - u_S\|^2 = (u - u_S, -w'') = a(u - u_S, w).$$

Finalmente, por (2.10),

$$\|u - u_S\|^2 = a(u - u_S, w) = a(u - u_S, w - v),$$

para todo $v \in S$. Ahora, gracias a la desigualdad de Schwarz (2.11), resulta

$$\begin{aligned} \|u - u_S\| &\leq \|u - u_S\|_E \|w - v\|_E / \|u - u_S\| \\ &= \|u - u_S\|_E \|w - v\|_E / \|w''\|. \end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre $v \in S$ tenemos que

$$\|u - u_S\| \leq \|u - u_S\|_E \inf_{v \in S} \|w - v\|_E / \|w''\|. \quad (2.13)$$

Así, podemos ver que el error en la norma $L^2(0, 1)$ puede ser mucho menor que en la norma E , siempre que w pueda aproximarse bien por alguna función perteneciente a S . Es razonable asumir que existe $v \in S$ cercano a w . Formalmente, podemos hacer la siguiente *suposición de aproximación*:

$$\inf_{v \in S} \|w - v\|_E \leq \epsilon \|w''\|. \quad (2.14)$$

Por supuesto, aquí ϵ representa un número real pequeño no negativo. Aplicando (2.14), la desigualdad (2.13) queda como

$$\|u - u_S\| \leq \epsilon \|u - u_S\|_E.$$

Podemos volver a aplicar (2.14) de nuevo, solo que sustituyendo w por u , de donde resulta

$$\inf_{v \in S} \|u - v\|_E \leq \epsilon \|u''\|.$$

Por el Teorema (4) resulta que $\inf_{v \in S} \|u - v\|_E = \|u - u_S\|_E$ y entonces

$$\|u - u_S\|_E \leq \epsilon \|u''\|.$$

Combinando estos resultados se tiene que

Corolario 1. *La suposición (2.14) implica que*

$$\|u - u_S\| \leq \epsilon \|u - u_S\|_E \leq \epsilon^2 \|u''\| = \epsilon^2 \|f\|.$$

Nota 4. *Es importante hacer notar que $\|u - u_S\|_E$ es de orden ϵ mientras que $\|u - u_S\|$ es de orden ϵ^2 , con lo cual, si encontramos una familia de espacios S para los cuales ϵ puede ser arbitrariamente pequeño, el método de Ritz-Galerkin nos proporcionará buenas aproximaciones al problema (2.1).*

2.3. Espacio de polinomios definidos a trozos. El Método de Elementos Finitos

En esta sección vamos a introducir un espacio S para aproximar la solución de (2.1). En este caso consideraremos el espacio de polinomios lineales a trozos sobre una partición del intervalo $[0, 1]$.

Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ una partición de $[0, 1]$ y sea S el espacio de las funciones lineales v tales que

- i) $v \in C^0([0, 1])$
- ii) $v|_{[x_{i-1}, x_i]}$ es un polinomio lineal, $i = 1, \dots, n$, y
- iii) $v(0) = 0$.

Nuestro primer objetivo es buscar una base de funciones para el espacio S . En este sentido, para cada $i = 1, \dots, n$, definimos $\phi_i(x)$ tal que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \tag{2.15}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker, como se muestra en la Figura 2.1. A partir de estas funciones definimos lo que llamaremos el interpolador de una función continua en el intervalo $[0, 1]$.

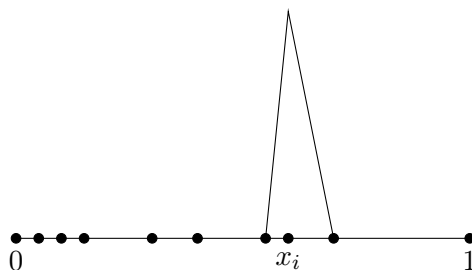


Figura 2.1: Función ϕ_i de la base del subespacio S de las funciones lineales a trozos.

Definición 1. Sea $v \in C^0([0, 1])$, el **interpolador** $v_I \in S$ de v viene dado por $v_I = \sum_{i=1}^n v(x_i)\phi_i$.

Nótese que v_I es una función lineal a trozos que interpola a v en los nodos x_i , es decir $v(x_i) = v_I(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. A partir de aquí, es fácil ver que las funciones ϕ_i forman una base de S .

Proposición 2. $\{\phi_i : 1 \leq i \leq n\}$ es una base de S .

Demostración. Tenemos que ver que las funciones ϕ_i son linealmente independientes y que generan el espacio S .

Que son linealmente independiente es casi obvio, puesto que

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Y, teniendo en cuenta que $\phi(x_j) = \delta_{ij}$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x_j) = c_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

por lo que las funciones son linealmente independientes.

También es evidente que forman un sistema generador. En efecto, si $v \in S$ entonces $v - v_I$ es una función lineal a trozos que se anula en cada uno de los nodos x_i . Por lo tanto $v = v_I$ o, lo que es lo mismo, v es combinación lineal de las funciones ϕ_i .

□

Una vez que tenemos una base de S , nos interesa ver cómo de buena es la aproximación dada por el interpolador para una determinada función del espacio V . En este sentido, probaremos el siguiente teorema.

Teorema 5. Sea $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. Entonces

$$\|u - u_I\|_E \leq Ch \|u''\|$$

para todo $u \in V$, donde C es independiente de h y de u .

Demostración. A partir de las definiciones de las dos normas, es claro que basta probar la estimación para cada trozo, es decir

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (u - u_I)'(x)^2 dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} u''(x)^2 dx, \quad (2.16)$$

de donde se sigue el resultado sumando en j y tomando $C = \sqrt{c}$.

Sea $e = u - u_I$ el error que queremos medir. Como u_I es un polinomio lineal en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, su derivada segunda es cero y (2.16) es equivalente a

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} e'(x)^2 dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} e''(x)^2 dx. \quad (2.17)$$

A continuación realizamos un cambio de variable con el fin de que la integral sea independiente de los nodos. De este modo tomamos

$$x = x_{j-1} + \tilde{x}(x_j - x_{j-1}),$$

por lo que (2.17) queda como

$$\int_0^1 \tilde{e}'(\tilde{x})^2 d\tilde{x} \leq c \int_0^1 \tilde{e}''(\tilde{x})^2 d\tilde{x}, \quad (2.18)$$

donde

$$\tilde{e}(\tilde{x}) = e(x_{j-1} + \tilde{x}(x_j - x_{j-1})).$$

Nótese que la desigualdad (2.18) no depende del tamaño de la partición. Para verificar esta estimación, comenzaremos por simplificar un poco la notación. Así, la variable \tilde{x} la volveremos a denotar como x y haremos $w = \tilde{e}$. Notemos que w se anula en los extremos del intervalo, es decir $w(0) = w(1) = 0$. Esto es así ya que el error es igual a cero en cada uno de los nodos y entonces

$$w(0) = \tilde{e}(x_{j-1}) = 0, \quad w(1) = \tilde{e}(x_j) = 0.$$

Por tanto, por el Teorema de Rolle, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que $w'(\xi) = 0$, de manera que podemos escribir

$$w'(y) = \int_{\xi}^y w''(x) dx.$$

y, entonces

$$|w'(y)| = \left| \int_{\xi}^y w''(x) dx \right| = \left| \int_{\xi}^y 1 \cdot w''(x) dx \right|.$$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|w'(y)| \leq \left| \int_{\xi}^y 1 dx \right|^{1/2} \cdot \left| \int_{\xi}^y w''(x)^2 dx \right|^{1/2} = |y - \xi|^{1/2} \cdot \left| \int_{\xi}^y w''(x)^2 dx \right|^{1/2},$$

de donde resulta

$$|w'(y)| \leq |y - \xi|^{1/2} \cdot \left| \int_0^1 w''(x)^2 dx \right|^{1/2}.$$

Elevando al cuadrado tenemos que

$$w'(y)^2 \leq |y - \xi| \cdot \int_0^1 w''(x)^2 dx$$

e integrado entre 0 y 1, llegamos a

$$\int_0^1 w'(y)^2 dy \leq \int_0^1 |y - \xi| dy \cdot \int_0^1 w''(x)^2 dx$$

Si tomamos c como

$$c = \sup_{\xi \in (0,1)} \int_0^1 |y - \xi| dy = \frac{1}{2},$$

entonces queda probada la desigualdad (2.18) y, por tanto, el teorema. \square

Este teorema nos permite ver que cuando h tiende a cero, el interpolador se aproxima a la función, de manera que el error se hace cero.

El siguiente paso es relacionar el interpolador con la solución u_S del problema de contorno planteado de manera discreta. En este sentido vamos a ver que si u_S es la solución del problema discreto (2.7), entonces es el interpolador de la solución del problema continuo (2.1).

Veamos que $u_S = u_I$. Para ello, definimos las siguientes funciones

$$g_{x_j}(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq x_j, \\ x_j & x_j < t < 1. \end{cases}$$

Ahora, no es difícil ver que

$$v(x_j) = a(v(t), g_{x_j}(t)) = \int_0^1 v'(t) g'_{x_j}(t) dt.$$

Como u satisface (2.1), entonces

$$a(u, v) = (f, v)$$

para todo $v \in S$. Análogamente, u_S verifica (2.7), por lo que

$$a(u_S, v) = (f, v)$$

para todo $v \in S$. Como g_{x_j} es lineal a trozos, entonces $g_{x_j} \in S$ y

$$a(u, g_{x_j}) = (f, g_{x_j}) = a(u_S, g_{x_j}) \Rightarrow u(x_j) = u_S(x_j)$$

y u_S es el interpolador. Este hecho demuestra que el espacio S de funciones lineales a trozos en una partición del intervalo $[0, 1]$ sirve para aproximar la solución del problema de contorno y que el error tiende a cero cuando la distancia entre nodos tiende a 0. Además, por el Corolario 1, el método es de orden 2.

2.3.1. Relación con los métodos en diferencias

La aproximación dada por polinomios lineales a trozos se puede ver también como si de un método en diferencias se tratara. De hecho, los elementos de la matriz \mathbf{K} , definida en (2.9), utilizando la base $\{\phi_i\}$ descrita con anterioridad, se pueden calcular con facilidad. Sea $h_i = x_i - x_{i-1}$, entonces

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi'_i \phi'_j dx$$

de donde se sigue

$$K_{ii} = h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}, \quad K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = -h_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (2.19)$$

y $K_{nn} = h_n^{-1}$, siendo el resto de elementos de \mathbf{K} cero. Por otra parte, los elementos de \mathbf{F}

$$\mathbf{F}_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x)}{h_i} (x - x_{i-1}) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f(x)}{h_{i+1}} (x - x_{i+1}) dx$$

pueden aproximarse si f es suficientemente buena. Tomando el desarrollo en serie de Taylor hasta orden cero, es decir, suponiendo que f es constante e igual a $f(x_i)$, resulta

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + \mathcal{O}(h)) \quad (2.20)$$

donde $h = \max_{1 \leq h_i \leq n} h_i$. Entonces, la i -ésima ecuación de $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ (para $1 \leq i \leq n-1$) puede escribirse como

$$\frac{-2}{h_i + h_{i+1}} \left[\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right] = f(x_i) + \mathcal{O}(h), \quad (2.21)$$

donde $U_0 = 0$. Nótese que el operador en diferencias de la parte izquierda de la ecuación (2.20) no es más que una aproximación de orden $\mathcal{O}(h)$ para el operador diferencial $-d^2/dx^2$. En el caso de que tengamos una equipartición, es decir $h_i = h$ para todo $i = 1, \dots, n$, las ecuaciones se reducen a las familiares ecuaciones en diferencias

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \quad (2.22)$$

donde ahora el orden de aproximación es dos. En cualquier caso, para una partición cualquiera (por ejemplo, $h_i = h$ para i par y $h_i = h/2$ para i impar), el Corolario 1 nos dice que el orden de aproximación es dos, al menos en $L^2(0, 1)$, a pesar de que la ecuación en diferencias sea formalmente consistente de orden uno.

2.4. Extensión a otras ecuaciones lineales

Lo visto anteriormente sirve para resolver un tipo de ecuaciones lineales muy concretas con unas determinadas condiciones de contorno. Ahora veremos una generalización de lo anterior para problemas de valores en la frontera de la forma,

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= g(x), \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bajo las suposiciones

$$\begin{cases} p \in C^1([a, b]), & p(x) \geq p_0 > 0, \\ q \in C([a, b]), & q(x) \geq 0, \\ g \in C^1([a, b]), \end{cases} \quad (2.24)$$

se sabe que (2.23) tiene solución única.

Para trabajar con un problema de este tipo es conveniente tener condiciones de contorno homogéneas. Así, si $u(x)$ es solución de (2.23), entonces $y(x) = u(x) - l(x)$ con

$$l(x) = \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{a-x}{a-b}, \quad l(a) = \alpha, \quad l(b) = \beta,$$

es solución del problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= f(x), \\ y(a) &= 0, \quad y(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde

$$f(x) = g(x) + p'(x)l'(x) - q(x)l(x).$$

Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos considerar, en vez de los problemas de la forma (2.23), los de la forma (2.25). Con la ayuda del *operador diferencial*

$$L(v) := -(pv')' + qv \tag{2.26}$$

asociado a (2.25), que actúa sobre el conjunto

$$D_L := \{v \in C^2[a, b] | v(a) = 0, v(b) = 0\},$$

el problema de valores en la frontera (2.25) es equivalente a encontrar una solución de

$$L(y) = f, \quad y \in D_L. \tag{2.27}$$

Claramente, D_L es un espacio vectorial real y L un operador lineal en D_L ya que

$$\forall u, v \in D_L, \alpha u + \beta v \in D_L, \quad L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

para cualesquiera α, β reales. Sobre $L^2(a, b)$, el conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en $[a, b]$, introducimos una forma bilineal y una norma según su definición

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_2 := (u, u)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.28}$$

El operador diferencial L de (2.26) tiene unas pocas propiedades que son muy importantes para la comprensión de los métodos variacionales y que están en consonancia con lo visto anteriormente. Una de ellas es la siguiente:

Teorema 6. L es un operador simétrico en D_L , i.e., se tiene que

$$(u, L(v)) = (L(u), v) \quad \forall u, v \in D_L.$$

Demostración. A través de la integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} (u, L(v)) &= \int_a^b u(x) [-(p(x)v(x))' + q(x)v(x)] dx \\ &= -u(x)p(x)v'(x) \Big|_a^b + \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx \\ &= \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx \end{aligned}$$

ya que $u(a) = u(b) = 0$ para $u \in D_L$. Por razones de simetría se tiene que

$$(L(u), v) = \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx \quad (2.29)$$

□

El lado derecho de (2.29) no solo está definido para $u, v \in D_L$. En efecto, sea $D := \{\mathcal{H}^1(a, b) | u(a) = u(b) = 0\}$ el conjunto de todas las funciones u que son absolutamente continuas en $[a, b]$ con $u(a) = u(b) = 0$, para las cuales u' es de cuadrado integrable en $[a, b]$. En particular, las funciones definidas a trozos continuas y derivables satisfaciendo las condiciones en la frontera pertenecen a D . D es de nuevo un espacio vectorial real con $D \supseteq D_L$. El lado derecho de (2.29) define en D la forma simétrica bilineal

$$[u, v] := \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx, \quad (2.30)$$

que, para cada $u, v \in D_L$, coincide con $(u, L(v))$. Además, si $y \in D_L, u \in D$, usando integración por partes

$$(u, L(y)) = [u, y]. \quad (2.31)$$

Nótese que $[u, v]$ no es más que una generalización de $a(u, v)$, de manera que $a(u, v) = [u, v]$ en el caso $p(x) = 1, q(x) = 0$. En este sentido, cabe esperar resultados similares a los ya probados con anterioridad. En efecto, se tiene que $[u, v]$ define un producto interno, que es consecuencia de que L es un operador definido positivo.

Teorema 7. *Bajo las hipótesis de (2.24) se tiene que*

$$[u, u] = (u, L(u)) > 0 \quad u \neq 0, u \in D_L.$$

Más aún, también se tiene que

$$\gamma \|u\|_\infty^2 \leq [u, u] \leq \Gamma \|u'\|_\infty^2 \quad \forall u \in D, \quad (2.32)$$

donde $\|u\|_\infty := \sup_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ y

$$\gamma := \frac{p_0}{b-a}, \quad \Gamma := \|p\|_\infty(b-a) + \|q\|_\infty(b-a)^3.$$

Demostración. Dado $u \in D$, como $u(a) = 0$, se tiene que

$$u(x) = \int_a^x u'(\xi) d\xi \quad \text{para } x \in [a, b].$$

Aplicando ahora la desigualdad de Schwarz se llega a

$$\begin{aligned} [u(x)]^2 &\leq \int_a^x 1^2 d\xi \int_a^x [u'(\xi)]^2 d\xi = (x-a) \int_a^x [u'(\xi)]^2 d\xi \\ &= (b-a) \int_a^x [u'(\xi)]^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|u\|_\infty^2 \leq (b-a) \int_a^x [u'(x)]^2 dx \leq (b-a)^2 \|u'\|_\infty^2. \quad (2.33)$$

Ahora, por hipótesis, se tiene que $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$. Partiendo de (2.30) y teniendo en cuenta (2.33) se tiene que

$$\begin{aligned} [u, u] &= \int_a^b (p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2) dx \geq \\ &\geq p_0 \int_a^b [u'(x)]^2 dx \geq \frac{p_0}{b-a} \|u\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, también a partir de (2.33), resulta

$$\begin{aligned} [u, u] &= \int_a^b (p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2) dx \leq \\ &\leq \|p\|_\infty(b-a)\|u'\|_\infty^2 + \|q\|_\infty(b-a)\|u\|_\infty^2 \leq \Gamma \|u'\|_\infty^2. \end{aligned}$$

□

La unicidad de la solución y de (2.25) o de (2.27) se deduce de forma casi inmediata a partir de este resultado. En particular, si

$$L(y_1) = L(y_2) = f, \quad y_1, y_2 \in D_L,$$

entonces $L(y_1 - y_2) = 0$ y, por el teorema anterior, $y_1 = y_2$.

Ahora definimos para $u \in D$ el funcional cuadrático

$$F(u) := [u, u] - 2(u, f), \quad (2.34)$$

donde f es el lado derecho de (2.25) o (2.27). Notar que F asocia a cada función $u \in D$ un número real $F(u)$. Algo fundamental para los métodos variacionales es ver que la función F alcanza el mínimo valor para la solución y de (2.27). Para ello, nos apoyaremos en el siguiente teorema

Teorema 8. *Sea $y \in D_L$ la solución de (2.27). Entonces*

$$F(u) > F(y)$$

para todo $u \in D, u \neq y$.

Demostración. La demostración es análoga a la dada en la Nota 1. También puede verse en [6, pp. 543–544]. \square

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos la siguiente igualdad

$$[u - y, u - y] = F(u) + [y, y] \quad \text{para todo } u \in D. \quad (2.35)$$

Por otra parte, este teorema nos indica que podemos aproximar la solución y minimizando $F(u)$ de manera aproximada. En este sentido, podemos considerar un subespacio $S \subset D$ de dimensión finita. Si $\dim S = m$ y tenemos una base de S , u_1, \dots, u_m , entonces, dado $u \in S$, u se puede representar de la forma

$$u = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m, \quad \delta_i \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Ahora determinamos el mínimo $u_S \in S$ de F en S ,

$$F(u_S) = \min_{u \in S} F(u), \quad (2.37)$$

y tomamos u_S como aproximación a la solución y de (2.27) que, según el Teorema 8, minimiza F en todo el espacio D . Para obtener u_S basta obtener los coeficientes δ_i que resultan de resolver un sistema de ecuaciones lineales similar a (2.9). Ahora, los elementos de la matriz \mathbf{K} vienen dados por

$$\mathbf{K}_{ij} = [u_i, u_j],$$

mientras que para el término independiente, \mathbf{F} , se tiene

$$\mathbf{F}_i = \int_a^b u_i f dx.$$

Una vez obtenida la aproximación u_S de la solución exacta, y , del problema (2.27), se tiene, partiendo de (2.35) y por la definición de $F(u_S)$, que

$$[u_S - y, u_S - y] = \min_{u \in S} [u - y, u - y]. \quad (2.38)$$

A partir de aquí se puede dar una acotación del error, que se recoge en el siguiente resultado

Teorema 9. *Sea y la solución exacta de (2.25), (2.27). Sea $S \in D$ un subespacio de dimensión finita de D y sea $F(u_S) = \min_{u \in S} F(u)$. Entonces*

$$\|u_S - y\|_\infty \leq C \|u' - y'\|_\infty$$

para todo $u \in S$. Además $C = \sqrt{\Gamma/\gamma}$, donde Γ y γ son las constantes del Teorema 7.

Demostración. La demostración se puede ver en [6, p. 454]. \square

Lo interesante es ver en qué se traduce esta estimación del error para casos concretos de subespacios S . Ya lo vimos para el caso de las funciones lineales a trozos en una partición del intervalo $[0, 1]$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$ y $b = 1$, podemos introducir otro subespacio de funciones, en este caso el formado por los splines cúbicos. Al igual que antes necesitaremos una partición del intervalo $[0, 1]$ en un conjunto de nodos, no necesariamente equiespaciados, aunque, por simplicidad, los tomaremos equidistantes. En este sentido, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $h = 1/(n+1)$. Esto da lugar a una colección de nodos igualmente espaciados en el intervalo $[0, 1]$ de manera que

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Consideremos la siguiente función cúbica a trozos, definida en el intervalo $[-2, 2]$ dada por

$$S(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2, \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3 + 4(1+x)^3] & -2 < x \leq -1, \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3] & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3] & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4} (2-x)^3 & 1 < x \leq 2, \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

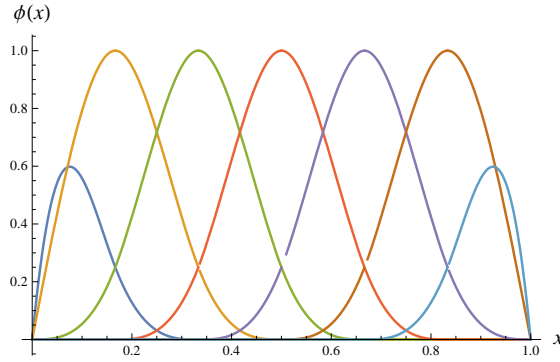


Figura 2.2: Base de funciones spline para el caso $n = 5$.

$S(x)$ satisface

$$\begin{aligned} S(2) = S(-2) = 0, \quad S(-1) = S(1) = 1/4, \quad S(0) = 1, \\ S'(-2) = S'(2) = 0, \quad S''(-2) = S''(2) = 0. \end{aligned}$$

Para obtener la base del espacio de dimensión finita, definimos

$$S_i(x) = S\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Estas funciones son linealmente independientes, pero no todas ellas satisfacen las condiciones en la frontera, es decir no todas ellas se anulan en $x = 0$ y $x = 1$. Para ello hay que modificar las dos primeras y las dos últimas, de manera que la base queda finalmente como

$$\begin{aligned} \phi_0(x) = S_0(x) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), \quad \phi_1(x) = S_1(x) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), \\ \phi_i(x) = S_i(x), \quad i = 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\phi_n(x) = S_n(x) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), \quad \phi_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right).$$

Para el caso en que $n = 5$, podemos ver en la Figura 2.2 las 7 funciones que forman parte de la base del espacio discreto.

Para esta base de funciones (véase [6, p. 546]), existe una estimación del error que viene dada por

$$\|y - u_S\|_\infty \leq Ch^3 \|y^{(4)}\|_\infty,$$

donde $h = 1/(n+1)$ y C es una constante. Esto nos dice que tenemos una aproximación de orden 4, lo que mejora la aproximación de orden 2 dada por el espacio de funciones lineales a trozos en la misma partición del intervalo $[0, 1]$.

Capítulo 3

Aplicación al cálculo de soluciones periódicas

Las ecuaciones lineales de segundo orden están asociadas a numerosos problemas de oscilaciones y, en algunos casos, la existencia de una solución periódica es única. En estos casos, si el problema presenta ciertas simetrías, puede formularse como uno de contorno del tipo que puede resolverse aplicando el método de Ritz-Galerkin, o de elementos finitos. En este capítulo presentaremos algunos ejemplos. El primero de ellos es trivial, ya que se trata de una ecuación diferencial de coeficientes constantes, cuya solución puede obtenerse mediante los métodos clásicos conocidos para ecuaciones diferenciales, pero nos servirá para comprobar la bondad de los métodos expuestos en el capítulo anterior. Sin embargo, los otros dos problemas no pueden resolverse de esta manera y es preciso la ayuda de métodos numéricos para encontrar dichas soluciones.

3.1. Ejemplo 1

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$y''(x) - y(x) = -(1 + 4\pi^2) \operatorname{sen}(2\pi x). \quad (3.1)$$

La solución general de la misma se puede expresar como suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Ahora bien, $y_h(x)$ se obtiene a partir de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial

$$m^2 - 1 = 0,$$

por lo que

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Por otra parte, la solución particular se obtiene mediante el método de coeficientes indeterminados ensayando una solución de la forma

$$y_p(x) = \alpha \cos(2\pi x) + \beta \sin(2\pi x),$$

resultando $\alpha = 0$, $\beta = 1$, por lo que $y_p(x) = \sin(2\pi x)$. Es decir, la solución general de (3.1) es igual a

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \sin(2\pi x).$$

La única solución periódica de este problema se obtiene cuando $A = B = 0$ y es dicha solución la que queremos obtener mediante métodos numéricos. Para obtenerla debemos resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = -(1 + 4\pi^2) \sin(2\pi x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Usaremos las bases de funciones lineales a trozos y spline, variando el número de nodos de la partición del intervalo $[0, 1]$. Puesto que la solución del problema es conocida, podremos calcular el error cometido y verificar el orden de los métodos.

3.1.1. Resolución mediante funciones lineales a trozos

Vamos a calcular la solución mediante el método de Ritz usando una base de funciones lineales a trozos utilizando un algoritmo que hemos implementado en Mathematica. En primer lugar, usaremos una equipartición del intervalo $[0, 1]$ con cinco nodos intermedios, es decir, consideraremos un espacio S de dimensión 5. En este caso debemos calcular la matriz \mathbf{K} de orden 5 cuyas entradas son

$$\mathbf{K}_{ij} = [\phi_i, \phi_j] = \int_0^1 (\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j) dx, \quad i, j = 1, \dots, 5,$$

donde ϕ_j son las funciones de la base de S definidas en (2.15). Por otro lado el vector \mathbf{F} viene dado por

$$\mathbf{F}_i = \int_0^1 (1 + 4\pi^2) \phi_i(x) \sin(2\pi x) dx.$$

Resolviendo el sistema

$$\mathbf{KY} = \mathbf{F}$$

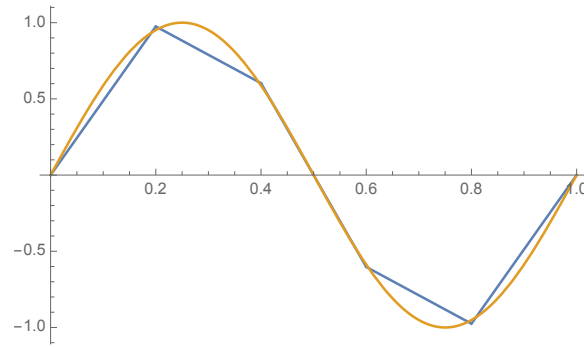


Figura 3.1: Aproximación de la solución periódica del problema (3.1) mediante funciones lineales a trozos con cinco nodos intermedios.

obtenemos la solución

$$y_5(x) = \sum_{i=1}^5 y_i \phi_i(x),$$

que viene dada por

$$y_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \text{ ó } x \leq 0, \\ 5,20723x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{6}, \\ 0,867872 & \text{si } \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ 2,60362 - 5,20723x & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ -0,867872 & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}, \\ -5,20723 + 5,20723x & \text{si } \frac{5}{6} < x \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 3.1 puede verse $y_5(x)$ junto con la solución periódica del problema (3.1) y en la Figura 3.2 la gráfica del error, de donde se obtiene que

$$\|y_p(x) - y_5(x)\|_{\infty} = 0,132128.$$

Repitiendo lo mismo con 10, 20 y 40 nodos obtenemos unos errores que vienen dados en la Tabla 3.1. Como se ve, el error disminuye con el número de nodos y además cada vez que el número de nodos se duplica el error se divide aproximadamente por 4, lo que está de acuerdo con que el método sea de orden 2, como ya se dijo en el capítulo anterior

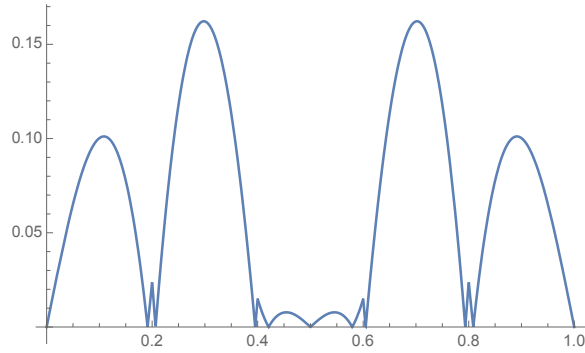


Figura 3.2: Error cometido al aproximar la solución periódica del problema (3.1) mediante funciones lineales a trozos con cinco nodos intermedios.

Núm. Nodos	Error lineal a trozos	Orden estimado
5	$e_5 = 0,132128$	
10	$e_{10} = 0,039469$	$\log e_5/e_{10}/\log 11/6 = 1,9934$
20	$e_{20} = 0,010957$	$\log e_{10}/e_{20}/\log 21/11 = 1,9819$
40	$e_{40} = 0,002884$	$\log e_{20}/e_{40}/\log 41/21 = 1,9951$

Tabla 3.1: Errores y orden estimado para la aproximación mediante polinomios lineales a trozos.

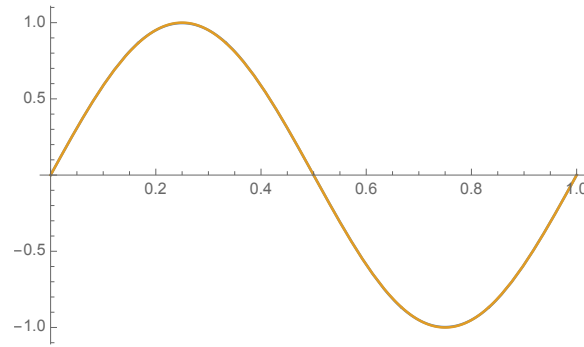


Figura 3.3: Aproximación de la solución periódica del problema (3.1) mediante funciones esplines con cinco nodos intermedios.

3.1.2. Resolución mediante funciones spline

Ahora vamos a resolver el mismo problema, pero usando una base de funciones spline, con las mismas particiones del intervalo $[0, 1]$ que antes, es decir, 5, 10, 20 y 40 nodos intermedios, mediante un algoritmo implementado en Mathematica. Para el caso de 5 nodos intermedios, la solución numérica viene dada por

$$y_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq 0, \\ x(6,28548 - 0,416621x - 36,3882x^2) & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{6}, \\ -0,166782 + 9,28755x - 18,429x^2 - 0,36335x^3 & \text{si } \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ -1,57227 + 21,9369x - 56,3772x^2 + 37,5848x^3 & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ -1,57227 + 21,9369x - 56,3772x^2 + 37,5848x^3 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}, \\ 9,67162 - 28,6606x + 19,5191x^2 - 0,36335x^3 & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}, \\ 30,5193 - 103,712x + 109,581x^2 - 36,3882x^3 & \text{si } \frac{5}{6} < x \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 3.3 puede verse $y_5(x)$ junto con la solución periódica del problema (3.1) y en la Figura 3.4 la gráfica del error, de donde se obtiene que

$$\|y_p(x) - y_5(x)\|_\infty = 0,00239257.$$

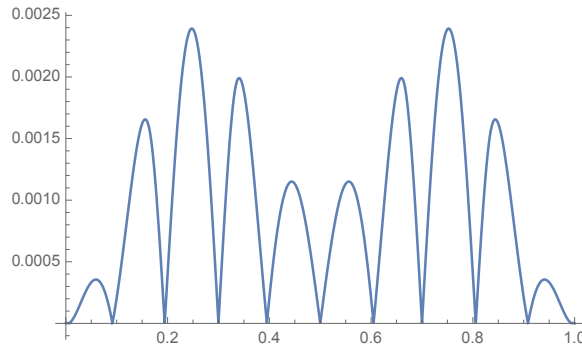


Figura 3.4: Error cometido al aproximar la solución periódica del problema (3.1) mediante funciones esplines con cinco nodos intermedios.

Núm. Nodos	Error lineal a trozos	Orden estimado
5	$e_5 = 0,002393$	
10	$e_{10} = 0,000154$	$\log e_5/e_{10}/\log 11/6 = 4,5238$
20	$e_{20} = 0,000011$	$\log e_{10}/e_{20}/\log 21/11 = 4,0428$
40	$e_{40} = 7,67^{-7}$	$\log e_{20}/e_{40}/\log 41/21 = 4,0199$

Tabla 3.2: Errores y orden estimado para la aproximación mediante funciones esplines.

Repitiendo lo mismo con 10, 20 y 40 nodos obtenemos unos errores que vienen dados en la Tabla 3.2. Como se ve, el error disminuye con el número de nodos y además cada vez que el número de nodos se duplica el error se divide aproximadamente por 16, lo que está de acuerdo con que el método sea de orden 4, como ya se dijo en el capítulo anterior.

Como se puede observar en las tablas, el método que tiene como base las funciones esplines es proporciona mejor aproximación, tal y como era de esperar.

3.2. Ejemplo 2

El ejemplo anterior es un caso en el que no sería necesario usar métodos numéricos, pero nos sirve para ver el comportamiento de los mismos. Ahora vamos a considerar un problema bastante similar, pero cuya solución no puede obtenerse por métodos elementales. Nuestro objetivo será ver que existe

una solución periódica y que ésta puede obtenerse resolviendo un problema de valores en la frontera, como en el ejemplo anterior. La ecuación a considerar es la siguiente

$$y''(x) - \cos^2(\pi x)y(x) = \sin(\pi x). \quad (3.2)$$

En primer lugar vamos a ver que este problema tiene una única solución periódica. Para ello nos basaremos en la siguiente definición

Definición 2. Se dice que el sistema lineal

$$y'(x) = B(x)y(x) \quad (3.3)$$

es **no crítico** con respecto a un periodo T , si no posee solución periódica de periodo T , salvo la solución trivial.

y en el siguiente resultado

Teorema 10. Sea el sistema lineal (3.3) y sea $f(x)$ una función periódica de periodo T tal que dicho sistema es no crítico respecto a dicho periodo, entonces existe una única función $y^*(x)$ de periodo T , en la variable x , que resuelve la siguiente ecuación

$$y'(x) = B(x)y + f(x).$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [3, p. 27]. □

Vamos a probar que nuestro problema es no crítico, es decir, que el problema homogéneo no posee soluciones periódicas de periodo $T = 2$. Para ello, supongamos que existe una solución periódica de periodo $T = 2$. Dicha solución la podemos escribir como una serie de Fourier de la forma

$$y(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x). \quad (3.4)$$

Si el problema es no crítico, entonces todos los coeficientes de Fourier deben ser igual a cero. Ahora bien, derivando (3.4) y sustituyendo en la ecuación homogénea correspondiente al problema (3.2), resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (-a_k k^2 \pi^2 \cos(k\pi x) - b_k k^2 \pi^2 \sin(k\pi x)) - \\ & \cos^2(\pi x) (a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) = 0. \end{aligned}$$

La igualdad anterior la podemos ver como una igualdad entre dos series de Fourier, toda vez que la parte izquierda de la ecuación se escriba como tal. Eso puede hacerse mediante las conocidas fórmulas trigonométricas para transformar productos de senos y cosenos en suma de ángulos múltiples. Una vez hecho esto, nos quedará un sistema de ecuaciones, donde las incógnitas van a ser los coeficientes de la serie de Fourier (3.4). Escribiendo las ecuaciones para los coeficientes en la parte de cosenos se tiene

$$\begin{aligned}
 2a_0 + a_2 &= 0, \\
 (3 + 4\pi^2)a_1 + a_3 &= 0, \\
 2a_0 + (2 + 4 \cdot 4\pi^2)a_2 + a_4 &= 0, \\
 a_1 + (2 + 4 \cdot 9\pi^2)a_3 + a_5 &= 0, \\
 &\vdots \\
 a_k + (2 + 4 \cdot (k+2)^2\pi^2)a_{k+2} + a_{k+4} &= 0. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Truncando el sistema en el orden N , nos queda un sistema homogéneo, cuya matriz de coeficientes es la siguiente

$$\begin{pmatrix}
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 3 + 4\pi^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 2 & 0 & 2 + 4 \cdot 4\pi^2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 2 + 4 \cdot 9\pi^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 2 + 4 \cdot N^2\pi^2
 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que se trata de una matriz diagonal dominante, por lo que la matriz es no singular y, por tanto, el correspondiente sistema de ecuaciones tiene solución única. Es decir, considerando la serie de Fourier hasta orden N , todos los coeficientes a_i , $i = 0, \dots, N$, son iguales a 0.

Para la parte correspondiente a los senos se tiene un resultado parecido,

ya que el sistema resultante se escribe como

$$\begin{aligned}
 (1 + 4\pi^2)b_1 + b_3 &= 0, \\
 (2 + 4 \cdot 4\pi^2)b_2 + b_4 &= 0, \\
 b_1 + (2 + 4 \cdot 9\pi^2)b_3 + b_5 &= 0, \\
 &\vdots \\
 b_k + (2 + 4 \cdot (k+2)^2\pi^2)b_{k+2} + b_{k+4} &= 0. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Al igual que ocurría antes, la matriz correspondiente al sistema, truncado en el orden N , resulta ser diagonal dominante, lo que implica que los coeficientes b_i , $i = 1, \dots, N$, son cero. Por consiguiente, no existe solución periódica para la ecuación diferencial homogénea asociada al problema (3.2). Así, aplicando el Teorema 10, existe una única solución periódica de periodo $T = 2$ para la ecuación diferencial del problema (3.2).

Para encontrar la solución periódica basta añadir condiciones de contorno apropiadas a la ecuación diferencial. En concreto, tendremos en cuenta la simetría de la solución. Podemos comprobar que si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, también $\phi(x) = -y(-x)$ lo es. En efecto, por ser $y(x)$ solución, resulta

$$y''(-x) - \cos^2(-\pi x)y(-x) = \sin(-\pi x),$$

de donde se sigue que

$$y''(-x) - \cos^2(\pi x)y(-x) = -\sin(\pi x).$$

Teniendo en cuenta que $y''(-x) = -\phi''(x)$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$-\phi''(x) + \cos^2(\pi x)\phi(x) = -\sin(\pi x) \Rightarrow \phi''(x) - \cos^2(\pi x)\phi(x) = \sin(\pi x),$$

por lo que $\phi(x) = -y(-x)$ es también solución de la ecuación diferencial. Si $y(x)$ es la solución periódica, $\phi(x)$ también es periódica y, por la unicidad, resulta que

$$y(x) = \phi(x) = -y(-x).$$

Es decir, la solución periódica es impar y, por lo tanto, $y(0) = 0$. Así, podemos añadir la condición de contorno $y(0) = y(1) = 0$ y, aplicando el método de elementos finitos, determinar la solución periódica. Nótese que el problema

de contorno planteado abarca solo medio periodo, algo que no es restrictivo para calcular la solución periódica, ya que la simetría nos servirá para reconstruirla. Por otra parte, al aproximarse solo la mitad de la solución los errores serán algo menores.

Abordaremos el problema a tratar con las dos bases de funciones, primero utilizaremos la base de funciones lineales a trozos con 5 y 11 nodos y luego utilizaremos la base de funciones spline con 5, 11, 21 y 41 nodos.

Consideremos una partición de 5 nodos, la solución numérica obtenida, utilizando como base las funciones lineales a trozos, viene dada por

$$y_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq 0, \\ -0,295010x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{6}, \\ -0,012705 - 0,218777x & \text{si } \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ -0,058594 - 0,081112x & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ -0,139706 + 0,081112x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}, \\ -0,231482 + 0,218777x & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}, \\ -0,295010 + 0,295010x & \text{si } \frac{5}{6} < x \leq 1, \end{cases}$$

cuya gráfica resultante puede verse en la Figura 3.5. En este caso no podemos obtener el error de aproximación, ya que no conocemos la solución exacta. Sin embargo, podríamos utilizar el método de extrapolación de Richardson para estimarlo, teniendo en cuenta que estamos usando un método de orden 2, como ya vimos en el Capítulo 2 y comprobamos en el ejemplo de la última sección. En concreto, si tenemos para el error

$$e_h = \max_{x \in [0,1]} (y_h(x) - y(x)) \approx Ch^p,$$

donde $y_h(x)$ es la solución numérica aproximada cuando $h = 1/(n+1)$, siendo n el número de nodos intermedios, mientras que $y(x)$ es la solución exacta, p el orden del método y C la constante del error, entonces

$$e_{h/2} \approx C \left(\frac{h}{2} \right)^p,$$

de donde

$$|e_h| \approx \frac{2^p}{2^p - 1} \max_{x \in [0,1]} |y_h(x) - y_{h/2}(x)|, \quad |e_{h/2}| \approx \frac{\max_{x \in [0,1]} |y_h(x) - y_{h/2}(x)|}{2^p - 1}.$$

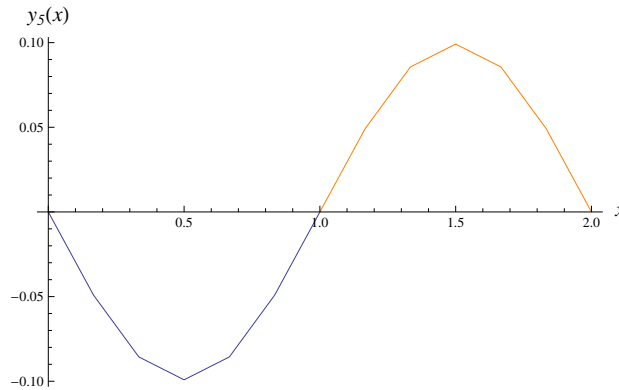


Figura 3.5: Solución periódica del problema (3.2) usando una partición con 5 nodos intermedios, mediante funciones lineales a trozos. En azul, la curva obtenida numéricamente y en naranja la parte reconstruida por simetría.

Tomado una partición con 11 nodos intermedios estimamos un error

$$\|y_5(x) - y(x)\|_\infty \approx 0,00436631, \quad \|y_{11}(x) - y(x)\|_\infty \approx 0,00109158.$$

A continuación, utilizamos la base de funciones spline con una partición de 5 nodos intermedios. Ahora, la solución numérica obtenida es

$$y_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq 0, \\ x(-0,307839 - 0,000104149x + 0,469046x^2) & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{6}, \\ 0,00034149 - 0,313986x + 0,0367767x^2 + 0,395285x^3 & \text{si } \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ 0,00889891 - 0,391003x + 0,267827x^2 + 0,164234x^3 & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0,0499575 - 0,637354x + 0,76053x^2 - 0,164234x^3 & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}, \\ 0,118417 - 0,945421x + 1,22263x^2 - 0,395285x^3 & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}, \\ 0,161103 - 1,09909x + 1,40704x^2 - 0,469046x^3 & \text{si } \frac{5}{6} < x < 1, \end{cases}$$

que viene representada en la Figura 3.6. Al igual que antes, estimamos el error usando una aproximación con 11 nodos intermedios mediante extrapolación de Richardson. Teniendo en cuenta que ahora el método es de orden 4, se obtienen las siguientes estimaciones del error

$$\|y_5(x) - y(x)\|_\infty \approx 2^4 \frac{\|y_5(x) - y_{11}(x)\|_\infty}{2^4 - 1} \approx 0,0000147,$$

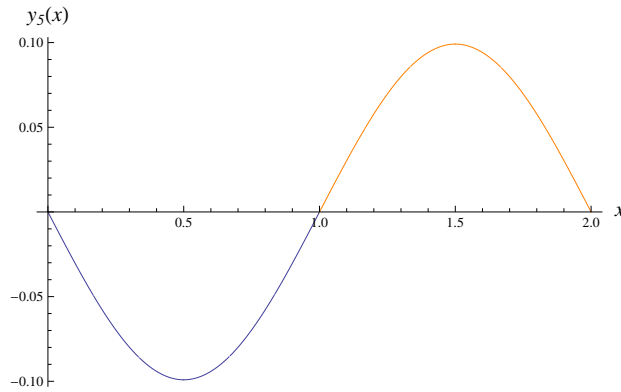


Figura 3.6: Solución periódica del problema (3.2) usando una partición con 5 nodos intermedios, mediante funciones spline. En azul, la curva obtenida numéricamente y en naranja la parte reconstruida por simetría.

Núm. Nodos	Estimación del error spline
5	0,0000147
11	$8,28451 \times 10^{-7}$
21	$7,14279 \times 10^{-8}$
41	$4,46424 \times 10^{-9}$

Tabla 3.3: Estimación del error por extrapolación de Richardson para la solución periódica del problema (3.2) usando funciones spline.

$$\|y_{11}(x) - y(x)\|_{\infty} \approx \frac{\|y_5(x) - y_{11}(x)\|_{\infty}}{2^4 - 1} \approx 8,28451 \times 10^{-7}.$$

Como se ve, el error estimado es sensiblemente menor que en el caso de las funciones lineales a trozos. Es más, si siguiéramos refinando la partición del intervalo $[0, 1]$ los errores se irían dividiendo, aproximadamente por 16, cada vez que se doblara el número de nodos. En la Tabla 3.3 se da la estimación del error hasta una partición con 41 nodos intermedios.

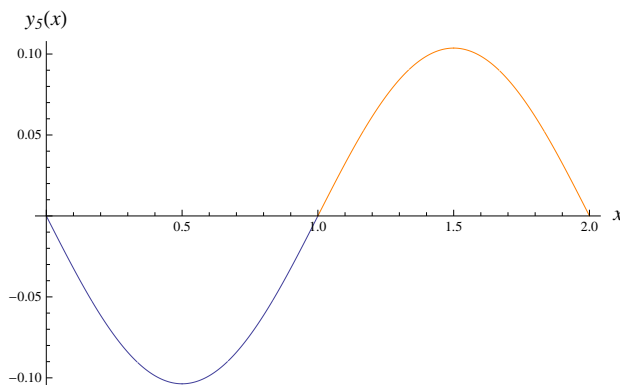


Figura 3.7: Solución periódica del problema (3.5) usando una partición con 5 nodos intermedios, mediante funciones spline. En azul, la curva obtenida numéricamente y en naranja la parte reconstruida por simetría.

3.3. Ejemplo 3

Este ejemplo es muy similar al considerado en la sección anterior, salvo una pequeña diferencia. La ecuación diferencial a considerar es

$$y''(x) + \cos^2(\pi x)y(x) = \sin(\pi x). \quad (3.5)$$

En este caso, la función $q(x)$ asociada a la ecuación diferencial no satisface la condición $q(x) \geq 0$ para $x \in [0, 1]$, lo que hace que el problema no entre en la categoría de los considerados en la parte teórica del capítulo 2. No obstante, el método de Galerkin no está necesariamente asociado a un problema variacional y, en principio, puede resolverse usando el mismo procedimiento, ya que puede verse que estamos en las condiciones de un problema no crítico que posee una única solución periódica con simetría impar. Por tanto, podemos añadir las condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Repitiendo lo mismo que se ha hecho en los ejemplos anteriores, en la Figura 3.7 aparece representada la solución periódica cuando se considera una partición con 5 nodos intermedios, usando funciones spline. Por último, damos una estimación de los errores, mediante extrapolación de Richardson, que queda reflejada en la Tabla 3.4.

Como se ve los errores se comportan del mismo modo que en el ejemplo anterior. Incluso puede parecer que las soluciones de ambos ejemplos son la

Núm. Nodos	Error Splines
5	0,0000138126
11	$6,91241 \times 10^{-7}$
21	$6,03821 \times 10^{-8}$
41	$3,77388 \times 10^{-9}$

Tabla 3.4: Estimación del error por extrapolación de Richardson para la solución periódica del problema (3.5) usando funciones spline.

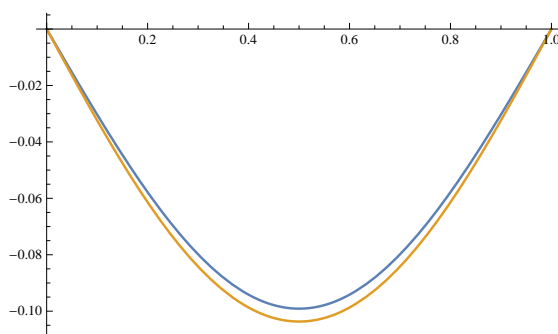


Figura 3.8: Las soluciones periódicas de los problemas (3.2), en azul, y (3.5), en naranja.

misma, pero no es así. Para verlo, basta ver la gráfica de ambas funciones superpuestas, como se muestra en la Figura 3.8.

Conclusión

Este trabajo me ha parecido bastante interesante puesto que la idea fue mía. Dicha idea vino fundamentada tras haber visto en clase un tipo muy particular de métodos numéricos. Además, me resulta curioso que esta teoría fuera desarrollada no hace más de doscientos años aunque la mayor curiosidad fue descubrir cómo se relacionan las distintas ramas matemáticas. En este caso, la relación entre el análisis y los métodos numéricos, cómo utilizando herramientas del análisis se desarrolla toda una teoría para métodos numéricos.

Bibliografía

- [1] S. C. Brenner, L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, 2008.
- [2] M. J. Gander, G. Wanner. From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing, *SIAM Review* **54**(4) 627–666, 2012.
- [3] J. K. Hale. *Oscillations in nonlinear systems*, Dover, New York, 1992.
- [4] J. E. Marsden, A. J. Tromba. *Cálculo vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1991.
- [5] F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [6] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1983.